

# △ - Y 変換

Yuka Ota

2022年3月3日

**定義 0.1.** (contraction map<sup>\*1</sup>, similitude<sup>\*2</sup>)  $(X, \rho)$  を距離空間とし,  $f: X \rightarrow X$  とする.

- 1) 或る  $\alpha \in (0, 1)$  が存在して, 任意の  $x, y \in X$  に対して  $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$  となるとき,  $f$  は  $(X, \rho)$  上の **contraction** と呼ばれる.
- 2) 或る  $\alpha \in (0, 1)$  が存在して, 任意の  $x, y \in X$  に対して  $\rho(f(x), f(y)) = \alpha\rho(x, y)$  となるとき,  $f$  は  $(X, \rho)$  上の **similitude** と呼ばれ,  $\alpha$  を  $f$  の **similarity ratio** と呼ぶ. 更に相似率  $\alpha$  が  $\alpha < 1$  をみたすとき,  $f$  を  $(X, \rho)$  上の **contractive similitude** と呼び,  $\alpha$  を  $f$  の **contraction ratio** という.

**注意 0.2.** contraction および similitude は連続写像であり, similitude は contraction である.

Euclidean space  $\mathbb{R}^d$  上の similitude に対しては次が成り立つ.

**命題 0.3.**  $d \in \mathbb{N}$  とし,  $f$  を similarity ratio  $\alpha$  をもつ  $\mathbb{R}^d$  上の similitude とする. このとき, 直交変換  $U \in O(d)$  と  $b \in \mathbb{R}^d$  が存在して, 任意の  $x \in \mathbb{R}^d$  に対し,  $f(x) = \alpha Ux + b$  となる.

*Proof.*  $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{\alpha}$  とおくと,  $g$  は等長写像であって,  $g(0) = 0$  である.

$g(x)$  が線形写像であることを示せばよい.

- 1) 更に,  $\lambda \geq 1$  である場合をまず考える. このとき,  $0, x, \lambda x$  は, この順で並んでいる:  $|x| + |\lambda x - x| = |\lambda x|$ . このことと  $|x| = |g(0) - g(x)| = |0 - g(x)|$ ,  $|g(x) - g(\lambda x)| = |x - \lambda x|$  から,  $|g(x)| + |g(x) - g(\lambda x)| = |g(\lambda x)|$  であり,  $0, g(x), g(\lambda x)$  は, この順で一直線上に並んでいる. よって,  $g(\lambda x) = \mu g(x)$  となる  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在する.

$$|0 - \lambda x| = |g(0) - g(\lambda x)| = |0 - \mu g(x)| = |\mu x|,$$

$\mu = |\mu| = \lambda$  である.

- 2) 単純に計算することで, ユークリッド距離では  $d_{\text{EUC}}(x, \frac{1}{2}(x+y)) + d_{\text{EUC}}(\frac{1}{2}(x+y), y) = d_{\text{EUC}}(x, y)$  と,  $d_{\text{EUC}}(x, \frac{1}{2}(x+y)) = d_{\text{EUC}}(\frac{1}{2}(x+y), y)$  が成り立つことがわかる; ここで  $g(x)$  の等長性から,  $d_{\text{EUC}}(g(x), \frac{1}{2}g(x+y)) + d_{\text{EUC}}(\frac{1}{2}g(x+y), g(y)) = d_{\text{EUC}}(g(x), g(y))$  つまり,  $g(x), g(x+y), g(y)$  は一直線上に並んでいる;  $g(y) - \frac{1}{2}g(x+y) = \mu\{\frac{1}{2}g(x+y) - g(x)\}$   $d_{\text{EUC}}(x, \frac{1}{2}(x+y)) = d_{\text{EUC}}(\frac{1}{2}(x+y), y)$  から,  $\mu = 1$ , つまり,  $g(x) + g(y) = g(x+y)$  がわかった.

□

**補題 0.4.**  $S$  を空でない有限集合とし,  $\alpha \in (0, 1)$  とする. このとき, 定理??の距離関数  $\delta_\alpha$  が  $\sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$  の積位相を距離付けしていること, すなわち,  $\Sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$  の積位相が距離関数  $\delta_\alpha$  から定まる  $\Sigma(S)$  の位相と一致することを示す.

*Proof.* 各  $i$  成分における離散距離を  $d_i$  で表すことにする. このとき,  $\Sigma(S)$  上に次のように距離  $d_p$  が入る:

$$d_p(\omega, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(\omega_i, \tau_i) \alpha^i$$

\*1 縮小写像

\*2 相似変換

$d_p$  が  $\delta_\alpha$  と同値な距離であることを示す. 任意に  $\omega, \tau \in \Sigma(S)$  を取り,  $\ell = \min\{m \in \mathbb{N} \mid [\omega]_m \neq [\tau]_m\}$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} d_p(\omega, \tau) &\leq \sum_{i=\ell}^{\infty} d_i(\omega_i, \tau_i) \alpha^i \\ &= \frac{\alpha^\ell}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \alpha^{\ell-1} \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \delta_\alpha(\omega, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \delta_\alpha(\omega, \tau) &\leq \alpha \alpha^{\ell-1} \\ &= \alpha^\ell \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} d_i(\omega_i, \tau_i) \alpha^i \\ &= d_p(\omega, \tau) \end{aligned}$$

したがって,

$$\alpha \delta_\alpha(\omega, \tau) \leq d_p(\omega, \tau) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \delta_\alpha(\omega, \tau)$$

一般に  $d_p(\cdot, \cdot)$  から定まる積位相と,  $S^{\mathbb{N}}$  の位相で一致する.  $\square$

**補題 0.5.** ( $\Delta$ - $Y$  変換 ( $\Delta$ - $Y$  transform)).  $V = \{q, x, y, z\}$  を  $\#V = 4$  であるような集合,  $U = \{x, y, z\}$  とし,  $L_\Delta = (L_{x', y'})_{x', y' \in U} \in \mathcal{L}\mathcal{A}(U)$  は  $L_{xy}, L_{yz}, L_{zx} \in (0, \infty)$  を満たすとす. このとき,  $L_* := L_{zx}L_{xy} + L_{xy}L_{yz} + L_{yz}L_{zx}$  とおき

$$\check{L}_{qx} := \frac{L_*}{L_{yz}}, \check{L}_{qy} := \frac{L_*}{L_{zx}}, \check{L}_{qz} := \frac{L_*}{L_{xy}}, \check{L}_{xy} := \check{L}_{yz} := \check{L}_{zx} := 0$$

により  $L_Y := (\check{L}_{x', y'})_{x', y' \in V} \in \mathcal{L}\mathcal{A}(V)$  を定めると  $L_\Delta = [L_Y]_U$ .

*Proof.* まず,  $\check{L}_{qq}$  について,  $\check{L}_{qx} + \check{L}_{qy} + \check{L}_{qz} + \check{L}_{qz} = 0$  から,

$$\check{L}_{qq} = - \left( \frac{L_*}{L_{yz}} + \frac{L_*}{L_{zx}} + \frac{L_*}{L_{xy}} \right)^{-1} = - \frac{L_{xy}L_{yz}L_{zx}}{(L_*)^2}$$

に注意する. また,  $\check{L}_{xx}$  について,  $\check{L}_{xx} + \check{L}_{xy} + \check{L}_{xz} + \check{L}_{xq} = 0$  であって,  $\check{L}_{xy} = \check{L}_{xz} (= \check{L}_{zx}) = 0$  から,  $\check{L}_{xx} = -\check{L}_{xq} = -\check{L}_{qx} = -\frac{L_*}{L_{yz}}$  がわかる.

$L_*$  の定義,  $\mathcal{L}\mathcal{A}(U)$  の定義から,

$$\begin{aligned} &\check{L}_{xx} + \frac{L_*}{L_{yz}} (\check{L}_{qq})^{-1} \frac{L_*}{L_{yz}} \\ &= -\frac{L_*}{L_{yz}} + \frac{L_{xy}L_{zx}}{L_{yz}} \\ &= -L_{xy} - L_{zx} \\ &= L_{xx} \end{aligned}$$

他の対角成分についても同様. また, 非対角成分については,

$$\begin{aligned} &-\check{L}_{xq} (\check{L}_{qq})^{-1} \check{L}_{qy} \\ &= -\frac{L_*}{L_{yz}} (\check{L}_{qq})^{-1} \frac{L_*}{L_{zx}} \\ &= \frac{(L_*)^2}{L_{yz}L_{zx}} \frac{L_{xy}L_{yz}L_{zx}}{(L_*)^2} \\ &= L_{xy} \end{aligned}$$

$\square$

**命題 0.6.** 1)  $\mathcal{C}_K \subset V_1$

2)  $\mathcal{C}_K \leq (\#S)(\#\mathcal{P})$

*Proof.* 1) まず, 各  $i \in S$  に対して,

$$\begin{aligned} F_i(V_0(\mathcal{L})) &= F_i(\pi(\mathcal{P}_{\mathcal{L}})) = \pi(\sigma_i(\mathcal{P}_{\mathcal{L}})) \\ &= \pi \left( \sigma_i \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (\sigma^n(\mathcal{C}_{\mathcal{L}})) \right) \right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi \circ \sigma_i(\sigma^n(\mathcal{C}_{\mathcal{L}})) \\ &\supset \pi \circ \sigma_i(\sigma(\mathcal{C}_{\mathcal{L}})) \end{aligned}$$

今,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in S} F_i(V_0(\mathcal{L})) &\supset \bigcup_{i \in S} \pi \circ \sigma_i(\sigma(\mathcal{C}_{\mathcal{L}})) \\ &= \pi \left( \bigcup_{i \in S} \sigma_i(\sigma(\mathcal{C}_{\mathcal{L}})) \right) \\ &= \pi(\mathcal{C}_{\mathcal{L}}) \\ &= \pi(\pi^{-1}(\mathcal{C}_K)) \\ &= \mathcal{C}_K \end{aligned}$$

前項で,  $\mathcal{C}_K \subset V_1$  が示されている. このことから,  $\#\mathcal{C}_K \leq \#V_1$ . 今,  $\pi$  が surjection だから,  $\#(\pi(\mathcal{P})) \leq \#\mathcal{P}$  である, したがって,  $\#F_i(\pi(\mathcal{P})) \leq \#(\pi(\mathcal{P})) \leq \#\mathcal{P}$  である.  $V_1 = \bigcup_{i \in S} F_i(V_0(\mathcal{L})) = F_i(\pi(\mathcal{P}))$  と合わせて,

$$\#V_1 \leq (\#S)(\#\pi(\mathcal{P})) \leq (\#S)(\#\mathcal{P})$$

□